

2025 年全国高考名校名师联席命制

数学信息卷(五)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
答案	A	B	C	C	D	B	C	B	BC	ABD	ABD	3	$\frac{\pi}{3}$	4

1. A 【热题型】集合的交、补混合运算

【深度解析】因为集合 $A = \{x | x \geq 0\}$, $B = \{x | -1 < x < 3\}$, 所以 $\complement_{\mathbb{R}} A = \{x | x < 0\}$, 所以 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B = \{x | -1 < x < 0\}$. 故选 A.

2. B 【热题型】复数的运算、复数的模

【深度解析】因为 $\frac{a+3i}{1+bi} = 1+2i$, 即 $a+3i = (1+2i)(1+bi)$, 化简得 $a+3i = 1+bi+2i+2bi^2 = (1-2b) + (2+b)i$. 又 $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$, 所以 $\begin{cases} a = 1-2b \\ 3 = 2+b \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$, 所以 $|a+bi| = |-1+i| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$. 故选 B.

3. C 【热考点】平面向量的夹角

【深度解析】由题意可知, $|a| = \sqrt{1^2+0^2} = 1$, 设 a 与 b 的夹角为 θ , 则 $\theta \in [0, \pi]$. 因为 $|a-b| = \sqrt{3}$, 所以等式两边分别平方可得, $a^2+b^2-2a \cdot b = 3$. 因为 $|b| = 1$, 所以 $a \cdot b = -\frac{1}{2}$, 所以

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{-\frac{1}{2}}{1 \times 1} = -\frac{1}{2}, \text{ 所以 } \theta = \frac{2\pi}{3}. \text{ 故选 C.}$$

4. C 【热考点】判断全称量词命题、存在量词命题的真假

【深度解析】由指数函数的性质可知 $\forall x \in \mathbb{R}, 2^x > 0$, 所以 $2^x + 1 > 1$, 所以 $\ln(2^x + 1) > 0$, 所以命题 p 是真命题, $\neg p$ 是假命题; $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的值域为 $[-1, 1]$, 所以命题 q 是假命题, 所以 $\neg q$ 是真命题. 故选 C.

5. D 【热题型】由 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象及性质确定其解析式

【深度解析】函数 $f(x) = a \sin 2\omega x + \cos 2\omega x = \sqrt{a^2+1} \sin(2\omega x + \varphi)$, 其中 $\tan \varphi = \frac{1}{a}$. 因为 $f(x)$ 图象的对称轴方程为 $x = k\pi + \frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$, 所以两个相邻的对称轴之间的距离为 π , 所以

$$f(x) \text{ 的最小正周期 } T = \frac{2\pi}{2\omega} = 2\pi, \text{ 所以 } \omega = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } f(x) = a \sin x + \cos x. \text{ 由 } f(x) \text{ 图象的对称轴方程为 } x = k\pi + \frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z}), \text{ 得 } f\left(2k\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = f(x), \text{ 令 } x = 0, \text{ 则 } f\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = f(0) (k \in \mathbb{Z}), \text{ 所以 } a \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = a \sin 0 + \cos 0 (k \in \mathbb{Z}), \text{ 解得 } a = 1, \text{ 所以 } f(x) = \sin x + \cos x, \text{ 则 } f\left(\frac{a\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}. \text{ 故选 D.}$$

6. B 【热题型】函数的最值、图象的对称中心

【深度解析】(提示:通过分析得出 $f(x) + f(-x) = 2$, 从而得出最大值与最小值的和, 得出函数 $g(x)$ 的表达式, 利用对勾函数 $h(x) = 2x + 1 + \frac{1}{2x+1}$ 图象的对称中心即可得出函数 $g(x)$ 图象的对称中心) 由题意, 在 $f(x) = \sin(\pi x) + \frac{2e^x}{e^x+1}$ 中, $f(-x) =$

$$\sin(-\pi x) + \frac{2e^{-x}}{e^{-x}+1} = -\sin(\pi x) + \frac{2}{e^x+1}, \therefore f(x) + f(-x) = 2, \therefore \text{ 函}$$

数 $f(x)$ 的图象关于点 $(0, 1)$ 中心对称. $\therefore f(x)$ 在 $x \in [-a, a]$ ($a > 0$) 时的最大值与最小值分别为 M 和 m , $\therefore M+m = f(x) +$

$$f(-x) = 2, \therefore g(x) = (M+m)x + \frac{1}{(M+m)x+1} = 2x + \frac{1}{2x+1} = 2x +$$

$$1 + \frac{1}{2x+1} - 1. \text{ 在对勾函数 } h(x) = 2x + 1 + \frac{1}{2x+1} \text{ 中, 其图象的对}$$

称中心为 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ (提示:根据 $y = x + \frac{1}{x}$ 图象的对称中心为

$(0, 0)$, 将 x 的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$, 并向左平移 $\frac{1}{2}$ 个单位长度

得到 $h(x) = 2x + 1 + \frac{1}{2x+1}$ 的图象, 所以 $h(x)$ 图象的对称中心为

$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, \therefore 函数 $g(x)$ 的图象可由对勾函数 $h(x) = 2x + 1 +$

$\frac{1}{2x+1}$ 的图象向下平移 1 个单位长度得到, \therefore 函数 $g(x)$ 图象

的对称中心为 $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$. 故选 B.

7. C 【热考点】直线与平面平行、直线与平面垂直、棱锥的体积

【深度解析】对于 A, 当 $\lambda = \mu$ 时, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BQ} - \overrightarrow{BP} = \lambda(\overrightarrow{BC_1} - \overrightarrow{BB_1}) = \lambda \overrightarrow{B_1C_1}$, 即 $PQ \parallel B_1C_1$, 而 $PQ \subset$ 平面 D_1PQ , $B_1C_1 \not\subset$ 平面 D_1PQ , 因此 $B_1C_1 \parallel$ 平面 D_1PQ , 故 A 正确;

对于 B, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, $\triangle AD_1P$ 的面积是定值, 又 $BC_1 \parallel AD_1$, $AD_1 \subset$ 平面 AD_1P , $BC_1 \not\subset$ 平面 AD_1P , 则 $BC_1 \parallel$ 平面 AD_1P , 所以点 Q 到平面 AD_1P 的距离是定值, 因此四面体 $APQD_1$ 的体积为定值, 故 B 正确;

$$\text{对于 C, 当 } \mu = \frac{1}{2} \text{ 时, } \overrightarrow{A_1Q} = \overrightarrow{BQ} - \overrightarrow{BA_1} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC_1} - (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}) - (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1}) = -\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2} \overrightarrow{BB_1} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC},$$

而 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BA} = \lambda \overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{BA}$ (提示:选择一组垂直基底分别表示向量, 判断向量的数量积即可), 则 $\overrightarrow{A_1Q} \cdot \overrightarrow{AP} =$

$$\left(-\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2} \overrightarrow{BB_1} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}\right) \cdot (\lambda \overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{BA}) = -\frac{1}{2} \lambda \overrightarrow{BB_1}^2 + \overrightarrow{BA}^2 = 4 -$$

$2\lambda \neq 0$, 因此 A_1Q 不垂直于 AP , 则不存在 $\lambda \in (0, 1)$, 使得 $A_1Q \perp$ 平面 D_1PA , 故 C 错误;

对于 D, 显然三棱锥 $P-CBD$ 的体积 $V = \frac{1}{3} \times S_{\triangle CBD} \times PB$, 因为 $S_{\triangle CBD}$ 为定值, 所以 PB 的长度决定三棱锥 $P-CBD$ 体积的取值范围, 因为 $PB \in (0, 2)$, 若 $PB = 2$, 则 $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 =$

$\frac{4}{3}$, 所以三棱锥 $P-CBD$ 体积的取值范围是 $(0, \frac{4}{3})$, 故 D 正确. 故选 C.

8. B 【热风向】导数的几何意义, 公切线问题及函数的零点

【深度解析】由 $y = \ln x$, 得 $y' = \frac{1}{x}$, 则 $y' \big|_{x=x_0} = \frac{1}{x_0}$, 所以曲线 $y = \ln x$ 在点 $(x_0, \ln x_0)$ 处的切线 l_1 的方程为 $y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$, 即 $y = \frac{1}{x_0} \cdot x + \ln x_0 - 1$, 设 l_1 与曲线 $y = e^x$ 相切于点 (x_1, e^{x_1}) , 由 $y = e^x$, 得 $y' = e^x$, 则 $y' \big|_{x=x_1} = e^{x_1}$, 所以曲线 $y = e^x$ 在点 (x_1, e^{x_1}) 处的切线方程为 $y - e^{x_1} = e^{x_1}(x - x_1)$, 即 $y = e^{x_1}x + e^{x_1}(1 - x_1)$, 所以 $\begin{cases} \frac{1}{x_0} = e^{x_1}, \\ \ln x_0 - 1 = e^{x_1}(1 - x_1), \end{cases}$ 整理得 $\ln x_0 - 1 = \frac{1}{x_0}(1 + \ln x_0)$, 即 $x_0 \ln x_0 - x_0 = 1 + \ln x_0$, 即 $\ln x_0(x_0 - 1) = x_0 + 1(x_0 \neq 1)$, 所以 $\ln x_0 = \frac{x_0 + 1}{x_0 - 1}$, 即 $\ln x_0 - \frac{x_0 + 1}{x_0 - 1} = 0$, 所以 x_0 一定是函数 $f(x) = \ln x - \frac{x+1}{x-1}$ 的零点. 故选 B.

9. BC 【热考点】正态分布、基本不等式及其应用

【深度解析】对于 A, 因为随机变量 $X \sim N(5, \sigma^2)$, 所以 $E(X) = 5$, 所以 $E(2X+1) = 2E(X) + 1 = 11$ (提示: 均值的性质, 即 $E(aX+b) = aE(X) + b$), 故 A 错误;

对于 B, 由题知, $\frac{m+n}{2} = 5$, 则 $m^2 + n^2 \geq \frac{1}{2}(m+n)^2 = 50$, 当且仅当 $m=n=5$ 时等号成立, 故 B 正确;

对于 C, 因为 $E(X) = 5$, 所以 $P(X \geq 3 + \sigma) > P(X \leq 3 - \sigma)$, 故 C 正确;

对于 D, 因为随机变量 $X \sim N(5, \sigma^2)$, 所以正态曲线的对称轴为直线 $X=5$, 因为 $P(4 < X < 5) = 0.68 - 0.5 = 0.18$, 所以 $P(5 \leq X < 6) = 0.18$, 故 D 错误. 故选 BC.

10. ABD 【热风向】曲线新定义

【深度解析】由题可得, 当 $a=1$ 时, 双纽线 C 的方程为 $\sqrt{(x+1)^2 + y^2} \times \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 1$, 化简可得 $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$, 故 A 正确;

当点 P 不在 x 轴上时, 在 $\triangle F_1PF_2$ 中, 由等面积法得 $\frac{1}{2}|PF_1| \cdot |PF_2| \cdot \sin \angle F_1PF_2 = \frac{1}{2}|F_1F_2| \cdot |y_0|$, 则 $|y_0| = \frac{1}{2} \cdot \sin \angle F_1PF_2$ (提示: 正弦函数的有界性), 所以 $|y_0| \in (0, \frac{1}{2}]$. 又当点 P 在 x 轴上时, $|y_0| = 0$, 所以 $|y_0| \in [0, \frac{1}{2}]$, 即 $-\frac{1}{2} \leq y_0 \leq \frac{1}{2}$, 故 B 正确;

因为 $|\overrightarrow{PF_1}| = |\overrightarrow{PF_2}|$, 所以点 P 在 F_1F_2 的垂直平分线上, 即 y 轴上, 所以令 $x=0$, 则 $\sqrt{1+y^2} \times \sqrt{1+y^2} = 1$, 解得 $y=0$, 所以双纽线 C 上满足 $|PF_1| = |PF_2|$ 的点 P 只有一个, 故 C 错误;

因为 $\overrightarrow{PO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2})$, 所以 $|\overrightarrow{PO}|^2 = \frac{1}{4}(|\overrightarrow{PF_1}|^2 + 2|\overrightarrow{PF_1}| \cdot |\overrightarrow{PF_2}| \cdot \cos \angle F_1PF_2 + |\overrightarrow{PF_2}|^2)$, 当点 P 不在 x 轴上时, 在 $\triangle F_1PF_2$ 中, 由余弦定理得, $4 = |\overrightarrow{F_1F_2}|^2 = |\overrightarrow{PF_1}|^2 + |\overrightarrow{PF_2}|^2 -$

$2|\overrightarrow{PF_1}| \cdot |\overrightarrow{PF_2}| \cdot \cos \angle F_1PF_2$ (提示: 余弦定理的应用), 所以 $|\overrightarrow{PO}|^2 = 1 + |\overrightarrow{PF_1}| \cdot |\overrightarrow{PF_2}| \cdot \cos \angle F_1PF_2 = 1 + \cos \angle F_1PF_2 < 2$, 又当点 P 在 x 轴上时 (不与原点重合), 设 $P(x_0, 0)$, 则 $x_0^4 = 2x_0^2$, 则 $x_0 = \pm\sqrt{2}$, 则 $|PO| = \sqrt{2}$, 所以 $|PO|$ 的最大值为 $\sqrt{2}$, 故 D 正确. 故选 ABD.

【真题溯源】双纽线类似横着的阿拉伯数字“8”, 或者无穷的符号“ ∞ ”, 体现了数学对称、和谐、简洁的特点, 是形成其他常见元素的基石, 故题目多以双纽线为设题背景, 研究其几何性质, 与 2024 年全国新课标 I 卷中第 11 题的设题方式类似, 考查学生对于信息以及数据的加工能力.

11. ABD 【热考点】利用导数研究函数的单调性

【深度解析】对于 A, $\because f(0) = e, f(\frac{1}{2}) = 1, y = f'(\frac{1}{2})$ 为奇函数, \therefore 函数 $y = f(x + \frac{1}{2})$ 为偶函数 (提示: 若导函数为奇函数, 则原函数为偶函数), 则 $f(x + \frac{1}{2}) = f(-x + \frac{1}{2})$, $\therefore f(1) = f(0) = e$, 故 A 正确.

对于 B, 令 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $g'(x) = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{e^{2x}} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} > 0$, $\therefore g(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore g(2) = \frac{f(2)}{e^2} > g(1) = \frac{f(1)}{e^1} = \frac{e}{e} = 1, f(2) > e^2$ (提示: 构造函数, 利用导数研究函数单调性, 借助 $x=1$ 时的函数值进行比较), 故 B 正确.

对于 C, \because 当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $g(x) = \frac{f(x)}{e^x} > g(\frac{1}{2}) = \frac{f(\frac{1}{2})}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} > 0$, $\therefore f(x) > 0$, $\therefore f'(x) > f(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增,

又 $f(x + \frac{1}{2}) = f(-x + \frac{1}{2}) \Rightarrow f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{1}{2}$ 对称, $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1}{2})$ 上单调递减, 则 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 处取得最小值, 为 1, \therefore 不存在 $x_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x_0) < 1$, 故 C 错误.

对于 D, 令 $h(x) = e^x - x (x > 0)$, 则 $h'(x) = e^x - 1 > 0, h(x)$ 单调递增, 又 $x \rightarrow 0$ 时, $h(x) \rightarrow 1$, 则 $h(x) = e^x - x > 1$, 即 $e^x > x+1 (x > 0)$, $\therefore e^{0.1} > 1 + 0.1 = 1.1 \Rightarrow e^{0.1} - \frac{1}{2} > 1.1 - \frac{1}{2} = 0.6$.

令 $\varphi(x) = \ln(1+x) - x (x > 0)$, 则 $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} < 0$, $\varphi(x)$ 单调递减, 又 $x \rightarrow 0$ 时, $\varphi(x) \rightarrow 0$, 则 $\varphi(x) = \ln(1+x) - x < 0$, 即 $\ln(1+x) < x (x > 0)$, $\therefore \ln 1.1 = \ln(1+0.1) < 0.1 \Rightarrow \frac{1}{2} - (-\ln 1.1) < \frac{1}{2} + 0.1 = 0.6$, $\therefore e^{0.1}$ 与 $\frac{1}{2}$ 的差大于 $\frac{1}{2}$ 与 $-\ln 1.1$ 的差 (提示: 将函数值的大小比较转化为自变量的大小比较), 又函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{1}{2}$ 对称, 当 $x > \frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递增, $\therefore f(e^{0.1}) > f(-\ln 1.1)$, 故 D 正确. 故选 ABD.

易错警示 (1) 如果 $f'(x)$ 为奇函数, 那么原函数一定为偶函数;

(2) 如果 $f'(x)$ 为偶函数, 那么原函数不一定为奇函数.

12.3 【热考点】 根据二项展开式中特定项的系数求参数

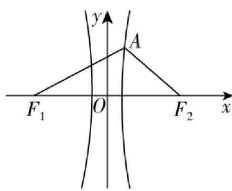
【深度解析】 $\left(x + \frac{m}{x}\right)^6$ 展开式的通项为 $T_{k+1} = C_6^k x^{6-k} \cdot \left(\frac{m}{x}\right)^k = m^k C_6^k x^{6-2k}$ ($k=0, 1, 2, \dots, 6$), 令 $6-2k=2$, 解得 $k=2$, 所以 x^2 项的系数为 $m^2 C_6^2 = 15m^2 = 135$ (易错: 注意区分二项式系数与项的系数), 又 $m>0$, 解得 $m=3$.

13. $\frac{\pi}{3}$ 【热考点】 正、余弦定理的应用

【深度解析】 在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $(a+b)(\sin A - \sin B) = (c-b) \cdot \sin C$, 所以由正弦定理得 $(a+b)(a-b) = c(c-b)$ (提示: 正确使用正弦定理的关键在于边角互化时, 等式两边需满足齐次化), 整理得 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$, 由余弦定理得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$. 因为 $0 < A < \pi$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

14.4 【热题型】 双曲线的方程与定义、函数的最值

【深度解析】 根据题意可得 $a^2 = 1$, $b^2 = 24$, $\therefore c^2 = 25$, $\therefore a = 1, c = 5$, $|AF_1| = |AF_2| + 2a = |AF_2| + 2$ (提示: 双曲线的定义),



$$\therefore |AF_1| - \frac{8}{|AF_2|} = |AF_2| - \frac{8}{|AF_2|} + 2,$$

由双曲线的性质可得 $|AF_2| \geq c - a = 4$, 设 $|AF_2| = t, t \geq 4$,

$$\text{则 } |AF_1| - \frac{8}{|AF_2|} = |AF_2| - \frac{8}{|AF_2|} + 2 = t - \frac{8}{t} + 2,$$

设 $f(t) = t - \frac{8}{t} + 2$ ($t \geq 4$), 则 $f'(t) = 1 + \frac{8}{t^2} > 0$ 在 $[4, +\infty)$ 上

恒成立, \therefore 函数 $f(t) = t - \frac{8}{t} + 2$ 是 $[4, +\infty)$ 上的增函数.

\therefore 当 $t=4$ 时, $t - \frac{8}{t} + 2$ 取得最小值, 为 4,

即 $|AF_1| - \frac{8}{|AF_2|}$ 的最小值为 4, 此时点 A 为右顶点.

解答题超详解及评分标准

15. (1) 见解析 (2) $\frac{2\sqrt{114}}{57}$

【热考点】 平面与平面垂直, 直线与平面所成的角

(1) **【证明】第一步:** 证得线面垂直

连接 AC 交 BD 于点 O, 连接 A_1O .

因为底面 ABCD 是边长为 2 的菱形, 所以点 O 为 AC, BD 的中点且 $AC \perp BD$.

又 $\angle A_1AB = \angle A_1AD = \angle BAD = 60^\circ, A_1A = 3$, 所以 $BD = 2, AO = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{3}$,

$A_1D = \sqrt{AD^2 + A_1A^2 - 2AD \cdot A_1A \cos \angle A_1AD} = \sqrt{7}$,

同理可得 $A_1B = \sqrt{7}$,

所以 $A_1O = \sqrt{A_1B^2 - OB^2} = \sqrt{6}$, 所以 $AO^2 + A_1O^2 = A_1A^2$, 所以 $\angle A_1OA = 90^\circ$,

即 $AO \perp A_1O$, 又 $BD \cap A_1O = O, BD, A_1O \subset \text{平面 } A_1BD$,

所以 $AC \perp \text{平面 } A_1BD$ 4 分

第二步: 利用面面垂直的判定定理证得面面垂直

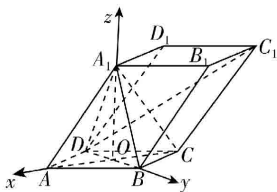
又 $AC \subset \text{平面 } ABCD$,

所以平面 $A_1BD \perp \text{平面 } ABCD$ 6 分

(2) **【解】第一步:** 建立空间直角坐标系, 写出点的坐标

由 (1) 可知 $A_1O \perp BD, A_1O \perp AC$, 又 $AC \perp BD$, 所以以点 O 为坐标原点, OA, OB, OA_1 所在直线分别为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $D(0, -1, 0), C(-\sqrt{3}, 0, 0), A_1(0, 0, \sqrt{6}), A(\sqrt{3}, 0, 0), C_1(-2\sqrt{3}, 0, \sqrt{6})$,

所以 $\overrightarrow{DC_1} = (-2\sqrt{3}, 1, \sqrt{6}), \overrightarrow{DC} = (-\sqrt{3}, 1, 0), \overrightarrow{DA_1} = (0, 1, \sqrt{6})$,



..... 8 分

第二步: 求得相应平面的法向量

设平面 A_1DC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DC} = -\sqrt{3}x + y = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DA_1} = y + \sqrt{6}z = 0, \end{cases} \text{ 令 } z = \sqrt{6}, \text{ 则 } x = -2\sqrt{3}, y = -6, \text{ 则 } \mathbf{n} = (-2\sqrt{3}, -6, \sqrt{6}). \text{ 11 分}$$

第三步: 求直线与平面所成角的正弦值

设直线 DC_1 与平面 A_1DC 所成角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{DC_1}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DC_1}|}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{DC_1}|} = \frac{12}{\sqrt{54} \times \sqrt{19}} = \frac{2\sqrt{114}}{57},$$

► 第 (1) 问 6 分, 分成线面垂直 (4 分) 面面垂直 (2 分) 两个部分给分

► 勾股定理, 证明垂直, 给 1 分; 若边长计算有误, 不扣分; 注重结论, 不深究过程

► 线面垂直, 给 2 分; 未指明 $BD \cap A_1O = O$, 只给 1 分

► 面面垂直, 给 2 分

► 第 (2) 问 7 分, 分成建系坐标 (2 分) 法向量 (3 分) 结论 (2 分) 三个部分给分

► 3 个向量, 给 2 分; 只写点的坐标, 正确也给分

► 设法向量, 给 1 分

► 正确写出法向量, 给 2 分; 其他赋值, 但符合共线关系也给分

► 正确求得线面角正弦值, 给 2 分; 若只写向量夹角的余弦值, 没有结论, 只给 1 分

所以直线 DC_1 与平面 A_1DC 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{114}}{57}$ 13 分

16. (1) $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1$ (2) 定值 $\frac{4}{3}$

【热考点】直线与椭圆的综合、椭圆的几何性质

【解】(1) 第一步: 利用已知及 $\triangle ABP$ 面积取最大值时点 P 的位置求得 a, b

由题意得 $2a = 2 \times 2b$, 即 $a = 2b$ ①.

当点 P 为 C 的上顶点或下顶点时, $\triangle ABP$ 的面积取得最大值,

所以 $\frac{1}{2} \times 2b \times a = 8$, 即 $ab = 8$ ②.

联立①②, 得 $a = 4, b = 2$ 4 分

第二步: 求出椭圆 C 的标准方程

故 C 的方程为 $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1$ 5 分

(2) $\triangle ABD$ 与 $\triangle AQE$ 的面积之比为定值, 为 $\frac{4}{3}$.

第一步: 设出直线 l 的方程, 与椭圆方程联立, 表示出坐标关系

由(1)可得 $A(-2, 0), B(2, 0)$,

由题意设直线 $l: x = my + 1, M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$.

联立 $\begin{cases} x = my + 1, \\ \frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1, \end{cases}$ 得 $(4m^2 + 1)y^2 + 8my - 12 = 0$, 由于 $\Delta = 64m^2 + 48(4m^2 + 1) > 0$,

则 $y_1 + y_2 = -\frac{8m}{4m^2 + 1}, y_1 y_2 = -\frac{12}{4m^2 + 1}$, 所以 $my_1 y_2 = \frac{3}{2}(y_1 + y_2)$ 8 分

直线 AM 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2)$, 令 $x = 4$, 得 $y = \frac{6y_1}{x_1 + 2}$, 即 $D(4, \frac{6y_1}{x_1 + 2})$.

同理可得 $E(4, \frac{2y_2}{x_2 - 2})$ 10 分

第二步: 把面积比转化为坐标比, 计算比值

故 $\triangle ABD$ 与 $\triangle AQE$ 的面积之比为

$$\begin{aligned} \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle AQE}} &= \frac{\frac{1}{2} |AB| |y_D|}{\frac{1}{2} |AQ| |y_E|} = \frac{4 |y_D|}{3 |y_E|} = \left| \frac{4y_1(x_2 - 2)}{y_2(x_1 + 2)} \right| = \left| \frac{4y_1(my_2 - 1)}{y_2(my_1 + 3)} \right| \\ &= 4 \times \left| \frac{my_1 y_2 - y_1}{my_1 y_2 + 3y_2} \right| \\ &= 4 \times \left| \frac{\frac{3}{2}(y_1 + y_2) - y_1}{\frac{3}{2}(y_1 + y_2) + 3y_2} \right| = 4 \times \left| \frac{\frac{1}{2}y_1 + \frac{3}{2}y_2}{\frac{3}{2}y_1 + \frac{9}{2}y_2} \right| = \frac{4}{3}, \end{aligned}$$

即 $\triangle ABD$ 与 $\triangle AQE$ 的面积之比为定值 $\frac{4}{3}$ 15 分

17. (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ (3) $\frac{675}{128}$

【热考点】条件概率、数学期望

【解】(1) 第一步: 设 A_i = “甲在第 i 轮获胜”

甲第三轮获胜有两种情况: 第一、二、三轮甲全胜; 第一轮甲输, 第二轮甲不参与, 第三轮甲胜,

设 A_i = “甲在第 i 轮获胜”, 则

第二步: 由条件概率公式计算

$$P(A_2 | A_3) = \frac{P(A_2 A_3)}{P(A_3)} = \frac{P(A_1 A_2 A_3)}{P(A_1 A_2 A_3) + P(\bar{A}_1 A_3)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{3}. \quad \text{..... 4 分}$$

▶ 第(1)问 5 分, 直接按照得分标准给分

▶ a 和 b 等量关系正确, 给 1 分

▶ a 和 b 数量关系正确, 给 1 分

▶ 全部正确, 给 2 分, 正确一个即给分

▶ 椭圆的标准方程正确, 给 1 分, 错误不得分

▶ 第(2)问 10 分, 分成联立(2 分)计算点坐标(3 分)面积比值(5 分)三个部分给分

▶ 设直线方程可得 1 分
注: 若用点斜式设直线方程也可得 1 分

▶ 联立方程可得 1 分

▶ 根与系数关系正确, 给 1 分

▶ 点的坐标正确, 1 个 1 分

▶ 三角形面积正确, 给 3 分, 错 1 个扣 2 分

▶ 化简定值, 给 2 分

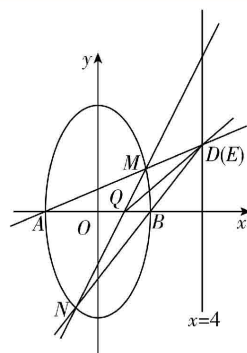
注: (1) 注重结论, 不深究过程;

(2) 只有化简结果, 也给分

▶ 第(1)问 4 分, 分成赛况(2 分)概率(2 分)两个部分给分

▶ 基本事件, 1 个 1 分; 全部正确, 给 2 分

▶ 条件概率的求解公式正确, 给 1 分; 结果正确, 给 1 分



(2) 第一步:全概率公式

设事件 C_n = “第 n 轮甲轮空”, $n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$, 则第 $n-1$ 轮甲参与比赛且输了, 故

$$P(C_n) = P(\overline{C_{n-1}} C_n) = P(\overline{C_{n-1}}) P(C_n | \overline{C_{n-1}}) = \frac{1}{2} [1 - P(C_{n-1})],$$

$$\therefore P(C_n) - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \left[P(C_{n-1}) - \frac{1}{3} \right], P(C_1) = 0 \left(\text{提示: 将 } \left\{ P(C_n) - \frac{1}{3} \right\} \text{ 看作数列, 则是首项为 } -\frac{1}{3}, \text{ 公比为 } -\frac{1}{2} \text{ 的等比数列} \right), \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

第二步:计算结果

$$\therefore P(C_n) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1}. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

(3) 第一步:设一轮比赛中甲获胜的局数为 X , 写出所有可能取值, 求相应概率及数学期望

设一轮比赛中甲获胜的局数为 X , 则 $X = 0, 1, 2$.

$$P(X=0) = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}, P(X=1) = C_2^1 \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{4},$$

$$P(X=2) = \left(\frac{1}{2} \right)^2 + C_2^2 \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{2}, \therefore E(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{4}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

第二步:设前六轮比赛中甲参与的轮数为 Y , 写出所有可能取值, 求相应概率及数学期望

前六轮比赛中甲参与的轮数为 Y , 则 $Y = 3, 4, 5, 6$.

$$P(Y=3) = \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} \left(\text{提示: } Y=3 \text{ 指甲在第一、三、五轮输了, 在第二、四、六轮中轮空} \right),$$

$$P(Y=4) = C_3^2 \left(\frac{1}{2} \right)^3 + C_3^1 \left(\frac{1}{2} \right)^4 = \frac{9}{16} \left(\text{提示: } Y=4 \text{ 指甲参与了第六轮且第六轮可输可赢, 前五轮中参与了三轮, 必有一轮赢, 其余两轮输; 或甲未参与第六轮, 参与了第五轮且第五轮输, 前四轮中参与了三轮, 必有两轮赢, 一轮输} \right),$$

$$P(Y=5) = C_4^1 \left(\frac{1}{2} \right)^4 + \left(\frac{1}{2} \right)^5 = \frac{9}{32} \left(\text{提示: } Y=5 \text{ 指甲参与了第六轮且第六轮可输可赢, 前五轮中参与了四轮, 必有一轮输, 其余三轮赢; 或甲未参与第六轮, 参与了第五轮且第五轮输, 前四轮中均参与了, 且都赢了} \right),$$

$$P(Y=6) = \left(\frac{1}{2} \right)^5 = \frac{1}{32} \left(\text{提示: } Y=6 \text{ 指甲每一轮都参与了, 在前五轮中都赢了, 第六轮可输可赢} \right),$$

$$\therefore E(Y) = 3 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{9}{16} + 5 \times \frac{9}{32} + 6 \times \frac{1}{32} = \frac{135}{32}. \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{前六轮比赛中甲获胜局数的期望为 } \frac{135}{32} \times \frac{5}{4} = \frac{675}{128}. \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

考法解读 n 局 m 胜制 ($n > m, n, m \in \mathbf{N}^*$), 特点是一旦某方获得 m 次胜利后立即终止比赛, 所以若比赛提前结束, 则一定在最后一次比赛后某方达到 m 次胜利. 本题以 3 局 2 胜制考查条件概率、全概率公式等知识, 理解清楚比赛规则, 灵活运用正难则反思想求解概率.

18. (1) 见解析 (2) $\left[\frac{3}{2e}, 1 \right)$ (3) 存在 $\left\{ \frac{e}{2} \right\}$

【热题型】 利用导数研究函数的单调性、最值, 不等式恒成立问题

【解】 (1) 第一步: 求导

由题意可知, $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq 1\}$,

$$\text{且 } f'(x) = \frac{(x-1)(2x+1)e^x - (2x-1)e^x}{(x-1)^2} = \frac{x(2x-3)e^x}{(x-1)^2}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

第二步: 利用导数研究函数单调性

$$\text{令 } f'(x) > 0, \text{ 解得 } x < 0 \text{ 或 } x > \frac{3}{2}; \text{ 令 } f'(x) < 0, \text{ 解得 } 0 < x < 1 \text{ 或 } 1 < x < \frac{3}{2},$$

$$\text{所以 } f(x) \text{ 在 } (-\infty, 0), \left(\frac{3}{2}, +\infty \right) \text{ 内单调递增, 在 } (0, 1), \left(1, \frac{3}{2} \right) \text{ 内单调递减.} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

► 第(2)问 4 分, 分成概率乘法公式(2 分) 结果(2 分) 两个部分给分

► 公式正确, 给 1 分

► 化简正确, 给 1 分; 注重结论, 不深究过程

► 结果正确, 给 2 分

► 第(3)问 7 分, 分成一轮比赛(2 分) 前六轮比赛(3 分) 数学期望(2 分) 三个部分给分

► 三种情况全部正确, 给 1 分; 期望正确, 给 1 分

注: (1) 注重结论, 不深究过程; (2) 未标注 X 取值, 概率计算正确, 给 2 分

► Y 取值正确, 给 1 分

► 四种情况部分正确, 给 2 分; 期望正确, 给 2 分

注: (1) 注重结论, 不深究过程; (2) 未标注 Y 的取值, 概率计算正确, 给 2 分

► 结论正确, 给 1 分; 错误不得分

► 第(1)问 5 分, 分成求导(2 分) 单调区间(3 分) 两个部分给分

► 定义域正确, 给 1 分; 求导正确, 给 1 分

► 单调性正确, 1 个 1 分, 连接符号错误不给分

(2) 第一步:根据 x_0 的范围讨论函数 $f(x)$ 的单调性

(提示:分 $x_0 > 1$ 和 $x_0 < 1$ 两种情况,根据(1)中单调性求最值,分析求解)

当 $x_0 > 1$ 时,由(1)可知, $f(x)$ 在 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 内单调递减,在 $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ 内单调递增,

则 $f(x_0) \geq f\left(\frac{3}{2}\right) = 4e^{\frac{3}{2}} > 2$, 不符合题意;

当 $x_0 < 1$ 时,由(1)可知, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内单调递增,在 $(0, 1)$ 内单调递减,

则 $f(x_0) \leq f(0) = 1 < 2$, 且 $f(-1) = \frac{3}{2e}$ 7分

第二步:由单调性确定最值得出参数范围

若存在唯一的整数 x_0 , 使得 $a < f(x_0) < 2$, 则 $x_0 = 0, \frac{3}{2e} \leq a < 1$.

综上,实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{3}{2e}, 1\right)$ 9分

(3) (提示:构造 $g(x) = \frac{(2x-1)e^x}{5x^2-4x+1}$, 利用导数判断 $g(x)$ 的单调性,分 $x > 1$ 和 $x < 1$ 两种情况,参变分离结合恒成立问题分析求解)

第一步:构造函数研究单调性

构造函数 $g(x) = \frac{(2x-1)e^x}{5x^2-4x+1}$, 因为 $5x^2-4x+1 = 5\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} > 0$, 可知 $g(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ,

且 $g'(x) = \frac{(5x^2-4x+1)(2x+1)e^x - (10x-4)(2x-1)e^x}{(5x^2-4x+1)^2} = \frac{(10x-3)(x-1)^2 e^x}{(5x^2-4x+1)^2}$,

当 $x < \frac{3}{10}$ 时, $g'(x) < 0$; 当 $x > \frac{3}{10}$ 时, $g'(x) \geq 0$ 且不恒为 0,

可知 $g(x)$ 在 $\left(-\infty, \frac{3}{10}\right)$ 内单调递减,在 $\left(\frac{3}{10}, +\infty\right)$ 内单调递增. 14分

第二步:表示出参数 m 的不等式,再利用 $g(x)$ 的最值得出参数 m 的范围

因为 $f(x) = \frac{(2x-1)e^x}{x-1} > \frac{m(5x^2-4x+1)}{x-1}$ 恒成立,

(提示:分 $x > 1$ 和 $x < 1$ 两种情况,参变分离结合恒成立问题分析求解)

若 $x > 1$, 则 $\frac{(2x-1)e^x}{5x^2-4x+1} > m$,

因为 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内单调递增,所以 $g(x) > g(1) = \frac{e}{2}$, 所以 $m \leq \frac{e}{2}$.

若 $x < 1$, 则 $\frac{(2x-1)e^x}{5x^2-4x+1} < m$,

因为 $g(x)$ 在 $\left(-\infty, \frac{3}{10}\right)$ 内单调递减,在 $\left(\frac{3}{10}, 1\right)$ 内单调递增,

且当 $x < 0$ 时, $g(x) < 0, g(1) = \frac{e}{2} > 0$, 则 $g(x) < \frac{e}{2}$ 对任意 $x < 1$ 恒成立,所以 $m \geq \frac{e}{2}$.

综上, $m = \frac{e}{2}$.

所以存在实数 m , 使得 $f(x) > \frac{m(5x^2-4x+1)}{x-1}$ 恒成立,且 m 的取值范围为 $\left\{\frac{e}{2}\right\}$ 17分

19. (1) $\frac{1}{6}$ (2) 见解析 (3) 见解析

【热风向】新定义数列的理解、证明

(1) 【解】由题可知,该数列没有第 4 项,则第 3 项 $a_3 = \frac{1}{2}$ (提示:递推公式中分母为 0 时没有

后一项), 由递推公式 $a_{n+1} = \frac{2a_n}{2a_n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$ 可得, $a_2 = -\frac{1}{2}, a_1 = \frac{1}{6}$.

▶ 第(2)问 4 分,分成讨论(2 分)结论(2 分)两个部分给分

▶ 必要解析步骤,给 1 分

▶ 必要解析步骤,给 1 分

▶ 结论正确,给 2 分

▶ 第(3)问 8 分,分成构造函数(5 分)分类讨论(3 分)两个部分给分

▶ 构造函数,给 2 分

▶ 求导正确,给 1 分;无计算过程也给分,未化简也给分

▶ 单调性正确,1 个 1 分

▶ 两个讨论情况,1 个 1 分;结论正确就给 1 分

▶ 第(1)问 5 分,分成 a_3 (2 分) a_1 和 a_2 (2 分) 结论(1 分)三个部分给分

经计算,无论降维过程如何进行,最终得到的“坍塌数”都是 $\frac{1}{6}$ 5分

(2)【证明】第一步:找到 a_i 和 a_j 之间的关系

设 $-1 < a_i < 1, -1 < a_j < 1$, 则 $0 < 1 + a_i a_j < 2$.

因为 $a_i + a_j + 1 + a_i a_j = (1 + a_i)(1 + a_j) > 0$, 所以 $a_i + a_j > -(1 + a_i a_j)$, 所以 $\frac{a_i + a_j}{1 + a_i a_j} > -1$,

$1 + a_i a_j - (a_i + a_j) = (1 - a_i)(1 - a_j) > 0$, 所以 $a_i + a_j < 1 + a_i a_j$, 所以 $\frac{a_i + a_j}{1 + a_i a_j} < 1$, 即 $-1 < \frac{a_i + a_j}{1 + a_i a_j} < 1$,

第二步:得出结论

所以当数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_i| < 1 (i = 1, 2, \dots, n)$ 时, 经过一次“降维”后得到的新数列仍然是边界为1的数列, 故这种“降维”可以持续进行, 直至得到一个只有一项的数列, 从而得到“坍塌数”. 10分

(3)【证明】第一步:定义新运算, 确定最终的“坍塌数”与实施“降维”的具体操作过程无关

定义运算“#”: $x \# y = \frac{x+y}{1+xy}$, 下面证明这个运算满足交换律与结合律.

$x \# y = \frac{x+y}{1+xy} = \frac{y+x}{1+yx} = y \# x$, 即运算“#”满足交换律,

又 $(x \# y) \# z = \frac{x+y}{1+xy} \# z = \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy} \cdot z} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+yz+zx}$,

$x \# (y \# z) = x \# \frac{y+z}{1+yz} = \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x \cdot \frac{y+z}{1+yz}} = \frac{x+xy+yz+y+z}{1+xy+yz+zx}$,

所以 $(x \# y) \# z = x \# (y \# z)$, 即运算“#”满足结合律,

所以对于给定的数列 $\{a_n\}$, 持续“降维”后得到的“坍塌数”是唯一确定的, 与实施“降维”的具体操作过程无关. 13分

第二步:分类讨论当 n 为奇数和偶数时的不同情况

对于给定的数列 $\{a_n\}$, $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$.

(i) 当 n 为偶数时, 设 $n = 2k, k \in \mathbb{N}^*$, 注意到 $a_{2k-1} + a_{2k} = -\frac{2k-1}{2k} + \frac{2k}{2k+1} = \frac{1}{2k(2k+1)} > 0$, 而 $1 + a_{2k-1} a_{2k} > 0$, 从而 $\frac{a_{2k-1} + a_{2k}}{1 + a_{2k-1} a_{2k}} > 0$.

按如下方式进行“降维”:

首先去掉第1项与第2项, 在数列末尾添加 $\frac{a_1 + a_2}{1 + a_1 a_2}$; 然后去掉原数列的第3项与第4项, 在数

列末尾添加 $\frac{a_3 + a_4}{1 + a_3 a_4}, \dots$, 按照此种方式进行 $\frac{n}{2}$ 次“降维”之后得到的数列各项皆为正, 因此最终得到的“坍塌数”必为正数.

(ii) 当 n 为奇数时, 设 $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}^*$, 注意到 $a_{2k} + a_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} - \frac{2k+1}{2k+2} = -\frac{1}{(2k+1)(2k+2)} < 0$,

而 $1 + a_{2k} a_{2k+1} > 0$, 从而 $\frac{a_{2k} + a_{2k+1}}{1 + a_{2k} a_{2k+1}} < 0$.

按如下方式进行“降维”:

首先去掉第2项与第3项, 在数列末尾添加 $\frac{a_2 + a_3}{1 + a_2 a_3}$; 然后去掉原数列的第4项与第5项, 在数

列末尾添加 $\frac{a_4 + a_5}{1 + a_4 a_5}, \dots$, 按照此种方式进行 $\frac{n-1}{2}$ 次“降维”之后, 得到的数列各项皆为负数, 因

此最终得到的“坍塌数”必为负数. 17分

考法解读 新定义: 对边界为1的无穷数列进行“降维”操作, 得到“坍塌数”. 本题设计巧妙, 通过多次对基础数列进行“降维”操作得到新定义数列, 以大量文字呈现命题背景, 有效考查学生对于题目的理解以及逻辑思维能力.

▶ 结论正确, 给1分

▶ 第(2)问5分, 分成 a_i 和 a_j 之间的关系(3分)结论(2分)两个部分给分

▶ 三个不等关系式, 每个各1分

▶ 第(3)问7分, 分成交换律与结合律(3分)分类讨论(4分)两个部分给分

▶ 交换律证明, 给1分

▶ 结合律证明, 给2分

▶ 奇数和偶数两种情况正确, 给2分

▶ 结论正确, 给2分